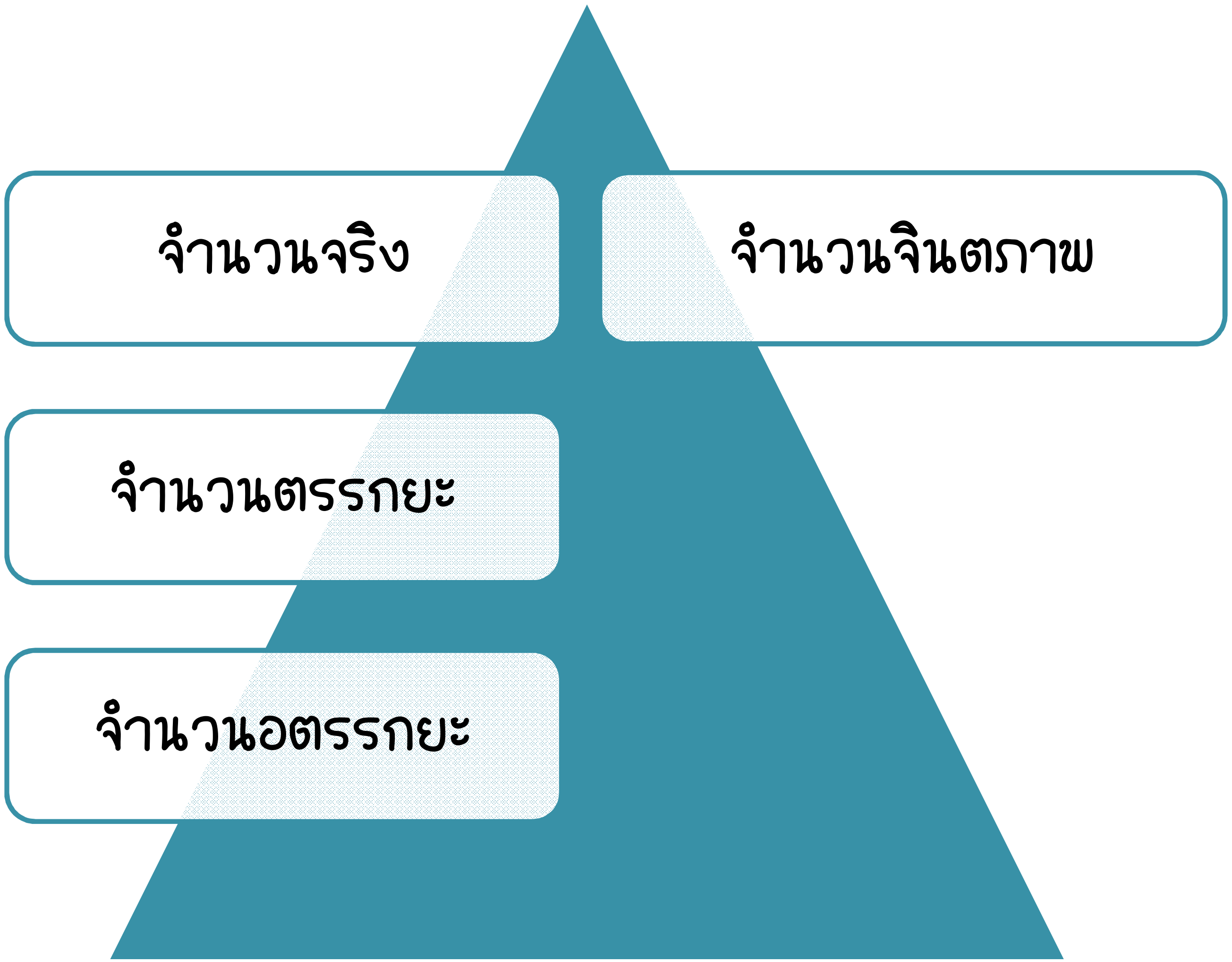
ปริมาณเชิงซ้อน (Complex Number)

จำนวนเชิงซ้อน



จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number , j)

$$j = \sqrt{-1} = j$$

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^3 = j^2.j = (-1)j = -j$$

$$j^4 = j^2.j^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$j^5 = j^4.j = 1.j = j$$

$$j^6 = j^4.j^2 = 1(-1) = -1$$

$$j^7 = j^4.j^3 = j^4.j^2.j = 1(-j) = -j$$

$$j^8 = j^4.j^4 = 1$$

จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number , j)

สรุปเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = i^2 = -1$$

$$i^{4n+3} = i^3 = -i$$

$\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 1 $\quad i^n = i$

$\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 2 $\quad i^n = -1$

$\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 3 $\quad i^n = -i$

$\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 0 $\quad i^n = 1$

ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าของ i^{57}, i^{83}, i^{100}, และ i^{250}

วิธีทำ $i^{57} = i^{4(14)+1} = i$

$i^{83} = i^{4(20)+3} = i^{3} = -i$

$i^{100} = i^{4(25)} = 1$

$i^{1250} = i^{4(312)+2} = i^{2} = -1$

SC

- - :

a

รูปแบบปริมาณเชิงซ้อน

- แบ่งเป็น 4 รูปแบบ คือ

1. Rectangular Form
2. Polar Form
3. Trigonometric Form
4. Exponential Form

จำนวนเลขเชิงซ้อน (Rectangular From)

- คือ จำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพ ถ้ากำหนดให้ z เป็นจำนวนเลขเชิงซ้อนจะได้ว่า

$$Z=R+jX$$

$$Z=X+jY$$

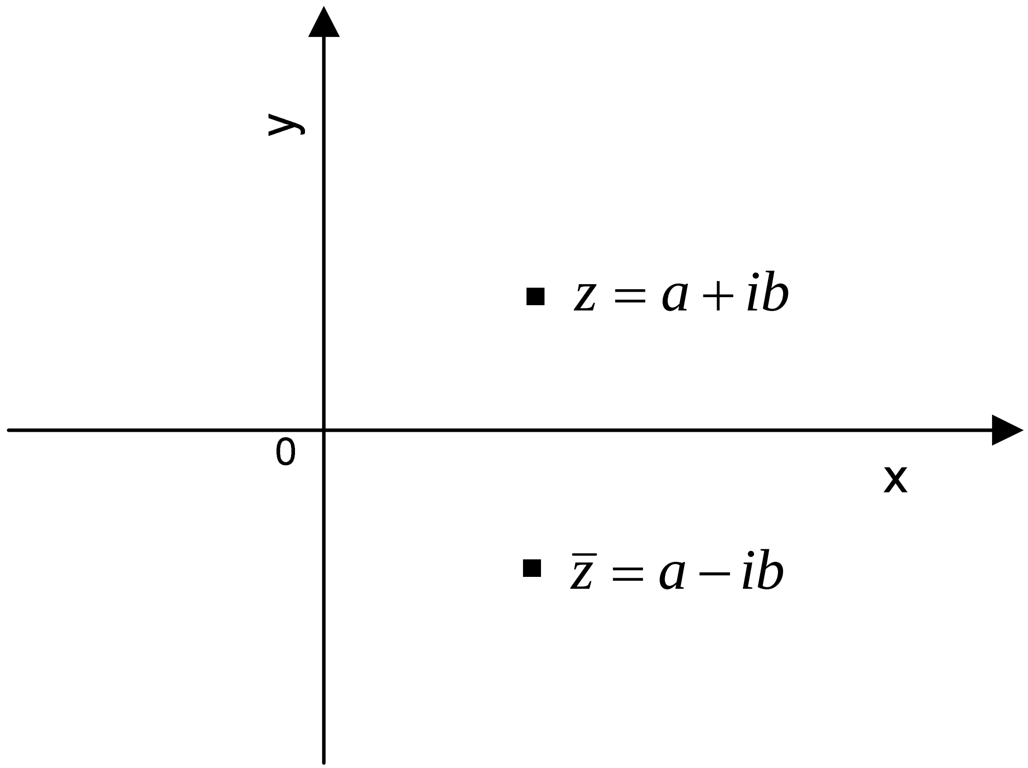
$$Z=a+jb$$

โดยที่ R, X, Y, a, b เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น R, X, a = ส่วนที่เป็นจำนวนจริง (Real Number)

jX, jY, jb=ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)

เมื่อนำแกนจำนวนจริงและแกนจำนวนจินตภาพมาเขียน โดยให้แกนจำนวนจริงอยู่ในแนวนอน และแกนจินตภาพอยู่ในแนวตั้ง ทุกๆจุดบนพื้นราบเชิงซ้อน (Complex Plane) ที่เกิดขึ้นจะแทนด้วยค่าของจำนวนเชิงซ้อน



ตัวอย่าง จงหาตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนบนพื้นราบเชิงซ้อน โดยกำหนดให้

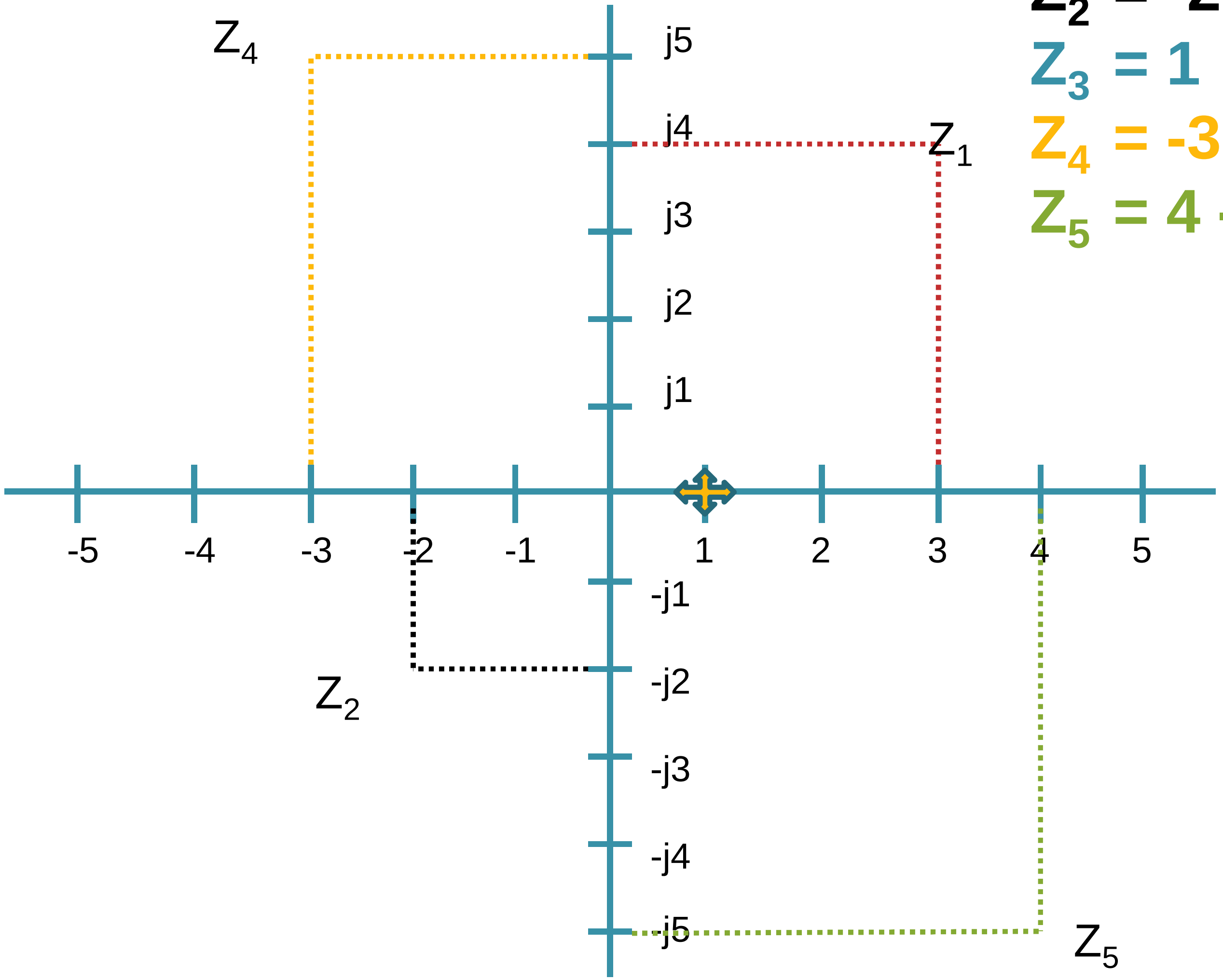
$Z_1 = 3 + j4$

$Z_2 = -2 - j2$

$Z_3 = 1$

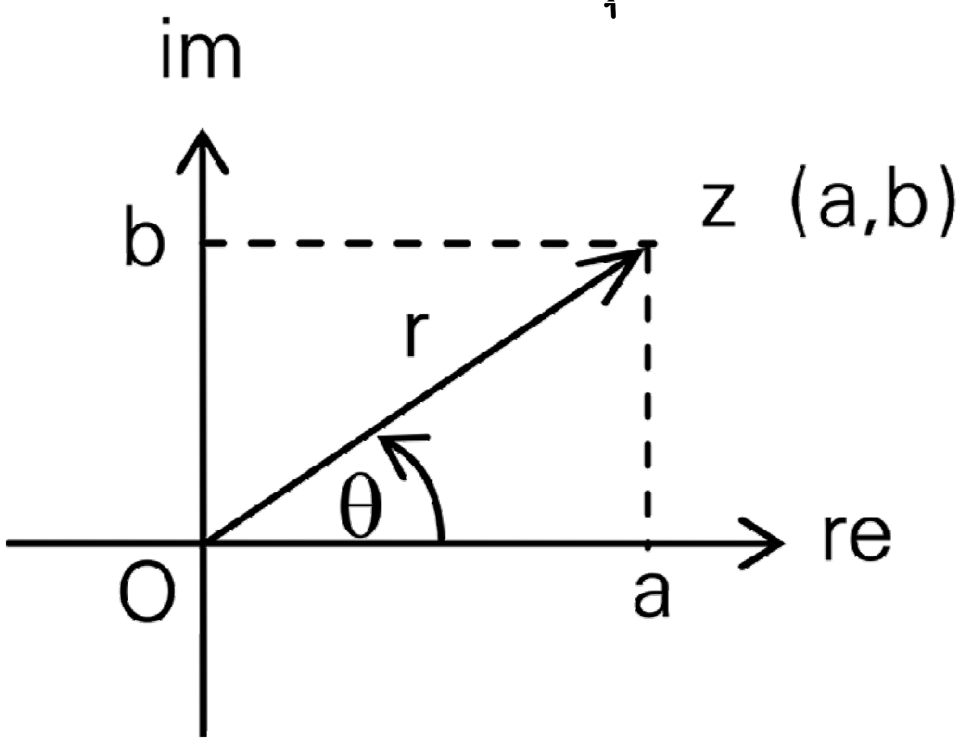
$Z_4 = -3 + j5$

$Z_5 = 4 - j5$



จำนวนเชิงซ้อนรูปแบบเชิงขั้ว (Polar From)

- เมื่อนำจำนวนเชิงซ้อนมากำหนดลงบนพื้นราบระหว่างแกนจำนวนจริงกับแกนจินตภาพจะได้ตำแหน่ง Z แล้วลากเส้นตรงจากจุดศูนย์ไปยังจุด Z จะได้แนวเส้นตรง r ทำมุมกับแนวแกนจำนวนจริงเป็นมุม θ

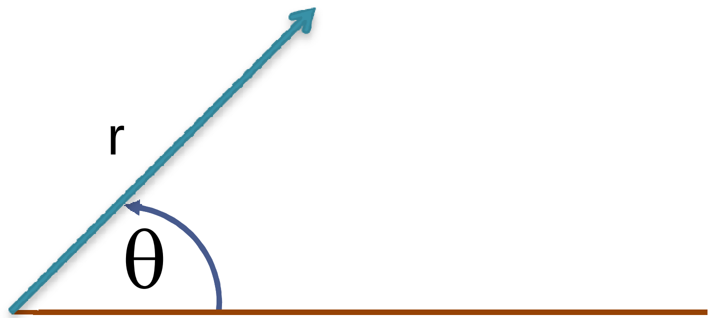


จำนวนเชิงซ้อนรูปแบบเชิงขั้ว(Polar From)

- จะได้ว่า $z=r\angle\theta°$ r คือ ขนาดของปริมาณเวคเตอร์หรือค่า Modulus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ มุม $$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

นั่นคือ $$Z = \sqrt{x^2 + y^2}\angle\tan^{-1}\frac{y}{x}$$ เขียนเป็นเวคเตอร์ได้ดังนี้



$Z=r\angle\theta$

เช่น $Z_1=5\angle 53.1°$

$Z_2=4\angle 30°$

แบบตรีโกณมิติ (Trigonometric Form)

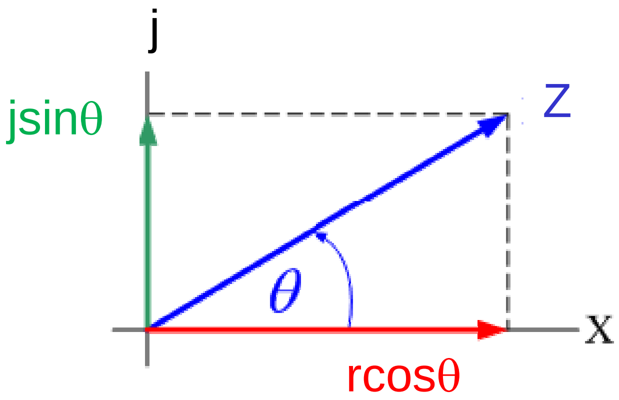
- เป็นรูปแบบของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยแท้ นั่นคือ มีค่า cos และ sin รวมอยู่ด้วย
- จะได้ว่า $X = r\cos\theta$

  และ $Y = r\sin\theta$

จาก $z = x+jy$

จะได้ว่า $z = r\cos\theta + jr\sin\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

เขียนเป็นเวคเตอร์ได้ดังนี้



แบบตรีโกณมิติ (Trigonometric Form)

- ตัวอย่าง

$$10\cos 60^\circ + j10\sin 60^\circ = 10(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ)$$

$$-3\cos 45^\circ - j3\sin 45^\circ = -3(\cos 45^\circ + j\sin 45^\circ)$$

แบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Form)

- จะเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเลขยกกำลังจากความสัมพันธ์

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

ดังนั้น $z = re^{j\theta}$

เมื่อ r คือ ขนาดของปริมาณเวคเตอร์

θ คือ ทิศทางของปริมาณเวคเตอร์ มีหน่วยเป็นเรเดียน (Radian)ซึ่งอาจจะเป็นเลขทศนิยมหรือค่าใดๆ ของพาย (π)

เช่น $Z_1 = 3e^{j3.14}$

$$Z_1 = -4e^{j\frac{\pi}{3}}$$

สรุป

- สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบต่างๆได้ 4 แบบ ดังนี้

1.แบบแกนมุมฉาก (Rectangular Form) $z = x + jy$

2.แบบเชิงขั้ว (Polar Form) $z = r\angle\theta$

3.แบบตรีโกณมิติ (Trigonometric Form) $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

4.แบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Form) $z = re^{j\theta}$

คอนจูเกทของปริมาณเชิงซ้อน

- การทำคอนจูเกท(Conjugate) ของปริมาณเชิงซ้อนจะใช้เครื่องหมายดอกจัน (*) ในตำแหน่งด้านขวาบน เช่น Z^* การทำคอนจูเกทดังกล่าวจะทำให้ทิศทางเปลี่ยนไป แต่ขนาดของปริมาณจะยังคงเท่าเดิม โดยแยกเป็นการคอนจูเกทในรูปฟอร์มต่างๆ ดังนี้
- แบบแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

ถ้า $Z=x+jy$ ดังนั้น $Z^*=x-jy$

เช่น $Z_1=-3+j4$

$Z^*_1=-3-j4$

เครื่องหมายของจำนวนจินตภาพจะเปลี่ยนไป จากบวกเป็นลบ จากลบเป็นบวก ในขณะที่จำนวนจริงยังคงเดิม

คอนจูเกทของปริมาณเชิงซ้อน

- แบบเชิงขั้ว (Polar Form)

ถ้า $Z=r\angle\theta^\circ$ ดังนั้น $Z^*=r\angle-\theta^\circ$

เช่น $Z_1=5\angle53.1^\circ$

$Z^*_1=5\angle-53.1^\circ$

ค่าของมุมจะเปลี่ยนแปลงไป จากบวกเป็นลบ จากลบเป็นบวก

ส่วนค่า r หรือ Modulus จะยังคงเท่าเดิม

คอนจูเกทของปริมาณเชิงซ้อน

- แบบตรีโกณมิติ (Trigonometric Form)

ถ้า $Z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ ดังนั้น $Z^* = r(\cos\theta - j\sin\theta)$

เช่น $Z_1 = 10(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$

$Z^*_1 = 10(\cos 30^\circ - j\sin 30^\circ)$

หรือ $Z_2 = -10(\cos 45^\circ - j\sin 45^\circ)$

$Z^*_2 = -10(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$

คอนจูเกทของปริมาณเชิงซ้อน

- แบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Form)

ถ้า $Z = re^{j\theta}$

ดังนั้น $Z^* = re^{-j\theta}$

เช่น $Z_1 = 10e^{j\frac{\pi}{3}}$

$Z_1^* = 10e^{-j\frac{\pi}{3}}$

เครื่องหมายหน้าตัวชี้กำลังจะเปลี่ยนไป จากบวกเป็นลบ จากลบเป็นบวก

ส่วนขนาดคือ 10 จะยังคงเดิม

การกระทำระหว่างปริมาณเชิงซ้อน

- การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน
- การบวก $(a+jb)+(c+jd) = (a+c)+j(b+d)$
- การลบ $(a+jb)-(c-jd) = (a-c)+j(b-d)$

ตัวอย่างเช่น $(3+j4)+(10+j10)=13+j14$

$(-3+j4)+(10-j10)=7-j6$

ถ้าหากอยู่ในรูป Polar From ต้องเปลี่ยนเป็น Rectangular From

ตัวอย่างเช่น $Z = 10\angle 30^{\circ}+10\angle 60^{\circ}$

$$=10(\cos 30^{\circ}+j\sin 30^{\circ})+10(\cos 60^{\circ}+j\sin 60^{\circ})$$

$$=10(0.866+j0.5)+10(0.5+j0.866)$$

$$=(8.66+j5)+(5+j8.66)$$

$$=13.66+j13.66$$

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

สามารถทำได้ 3 รูปแบบ คือ Rectangular Form Polar Form Exponential Form

Rectangular Form การคูณ เช่น $Z_1=2+j3$

$Z_2=3-j5$

นั่นคือ $Z= Z_1Z_2$

$$
\begin{aligned}
Z &=(2+j3)(3-j5)\\
&=6-j10+j9-j^2 15\\
&=6-j-(-1)(15)\\
&=21-j
\end{aligned}
$$

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

- การหาร โดยการนำค่าคอนจูเกทของตัวหารไปคูณทั้งเศษและส่วน

เช่น

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_2^*}{Z_2^*}$$

$$= \frac{(2 + j3)}{(3 - j5)} \cdot \frac{(3 + j5)}{(3 + j5)}$$

$$= \frac{6 + j10 + j9 + j^2 15}{9 + j15 - j15 - j^2 25}$$

$$= \frac{6 + j19 + (-1)15}{9 - (-1)25}$$

$$= \frac{-9 + j19}{34}$$

$$= \frac{-9}{34} + \frac{j19}{34}$$

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

- Polar Form $r_1\angle\theta \times r_2\angle\theta \quad = r_1 r_2\angle(\theta_1+\theta_2)$

$$\frac{r_1\angle\theta}{r_2\angle\theta} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$$

- เช่น การคูณ

$$\begin{aligned} Z_1 &= 5\angle 53.1^\circ \\ Z_2 &= 10\angle -30^\circ \\ \therefore Z_1 Z_2 &= 5\times 10\angle 53.1+(-30) \\ &= 50\angle 23.1^\circ \end{aligned}$$

- การหาร

$$\begin{aligned} Z_1 &= 5\angle 53.1^\circ \\ Z_2 &= 10\angle -30^\circ \\ \therefore \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{5}{10}\angle 53.1-(-30) \\ &= 0.5\angle 83.1^\circ \end{aligned}$$

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

- Exponential Form การคูณ

$$Z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$Z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

- เช่น

$$Z_1 = 5e^{j0.5}$$

$$Z_2 = -2e^{-j2.5}$$

$$Z_1 Z_2 = 5(-2)e^{j(0.5-2.5)}$$

$$= -10e^{-j2}$$

การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

- Exponential Form การหาร

$$Z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$Z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

- เช่น

$$Z_1 = 5e^{j0.3}$$

$$Z_2 = -2e^{-j3.3}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5}{-2} e^{j(0.3-(-3.3))}$$

$$= -2.5^{j3.6}$$

การเปลี่ยน Rectangular Form เป็น Polar Form

- หมายถึง แปลงจากรูปฟอร์ม X+jY ไปเป็น $r\angle\theta$

นั่นคือ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

- เช่น จงแปลง Z=3+j4 ไปเป็น Polar Form

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{4}{3}\right] = 53.1^\circ$$

$$\therefore 3 + j4 = 5\angle 53.1^\circ$$

การเปลี่ยน Polar Form เป็น Rectangular Form

หมายถึง แปลงจากรูปฟอร์ม $r\angle\theta$ ไปเป็น $X+jY$

นั่นคือ $x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

- เช่น จงแปลง $Z=5\angle 53.1^\circ$ ไปเป็น Rectangular Form

$x=5\cos 53.1^\circ = 5(0.6) = 3$

$y=5\sin 53.1^\circ = 5(0.799) = 4$

$\therefore 5\angle 53.1^\circ = 3+j4$

การเปลี่ยน Polar Form เป็น Exponential Form

- แปลงจากรูปฟอร์ม $r\angle\theta_1$ ไปเป็น $re^{j\theta}$

ค่า r มีค่าเท่าเดิม แต่

$$j\theta = j\frac{\theta_1 \times 3.14}{180}$$

เช่น จงแปลง $Z=2.236\angle 63.4^\circ$ ไปเป็น Exponential Form

วิธีทำ $r=2.236$

$$j\theta = j\frac{63.4 \times 3.14}{180}$$

$=1.1059$ เรเดียน (Radian)

$\therefore\ Z=2.236\angle 63.4^\circ = 2.236e^{j1.1059}$

การเปลี่ยน Exponential Form เป็น Polar Form

- แปลงจากรูปฟอร์ม $re^{j\theta}$ ไปเป็น $r\angle\theta$

r มีค่าเท่าเดิม

$$\theta_1 = j\frac{\theta_1 \times 180}{3.14}$$

เช่น จงแปลง Z= $2.236e^{j1.1059}$ ไปเป็น Polar Form

วิธีทำ r = 2.236

$$\theta_1 = j\frac{1.1059 \times 180}{3.14}$$

= 63.4 องศา

$\therefore 2.236e^{j1.1059} = 2.236\angle 63.4^{\circ}$

แบบฝึกหัด

- จงแสดงวิธีการกระทำระหว่าง ปริมาณเชิงซ้อน ดังต่อไปนี้

1. $(3+j5)+(5+j3)$
2. $(11-j4)+(6-j7)$
3. $(-15-j22)-(-9+j13)$
4. $(5+j3)(3+j5)$
5. $(6-j7)(11-j4)$
6. $(-9+j13)\div(15-j22)$
7. $(13+j55)\div(28-j83)$

แบบฝึกหัด

- จงแสดงวิธีการแปลง Rectangular Form เป็น Polar Form

1. $1+j2$
2. $2-j2$
3. $-1+j2$
4. $-1-j2$

- จงแสดงวิธีการแปลง Polar Form เป็น Rectangular Form

1. $2\angle 90^\circ$
2. $3\angle -30^\circ$
3. $-4\angle 45^\circ$
4. $-3\angle -60^\circ$