บทที่ 1.2 การคูณเวกเตอร์

1.2.1 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลลาร์_: ถ้า m เป็นเสกลลาร์ (มีขนาดเพียงอย่างเดียว) m$\vec{A}$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น m เท่า ของ $|\vec{A}|$ โดยมีทิศทางไปทางเดียวกับ $\vec{A}$ ถ้า m เป็นบวกแต่จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{A}$ ถ้า m เป็นลบ โดยที่ m อาจเป็นจำนวนเต็มหรือเศษส่วนก็ได้

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลลาร์ ใช้กฎการจัดหมู่และกฎการแจกแจง (distributive)

$$(r + s)(\vec{A} + \vec{B}) = r(\vec{A} + \vec{B}) + s(\vec{A} + \vec{B})$$

$$= r\vec{A} + r\vec{B} + s\vec{A} + s\vec{B}$$

การหารเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ การหารเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยสเกลลาร์ r ให้นำส่วนกลับของ r คือ $\frac{1}{r}$ มาคูณกับ $\vec{A}$; $\frac{\vec{A}}{r} = \vec{A}(\frac{1}{r})$

1.2.2 การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์

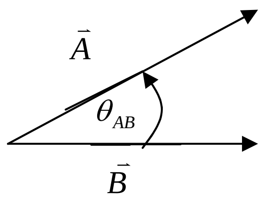
มี 2 แบบ คือ ผลคูณเชิงสเกลลาร์(dot Product) และผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Crass Product)

1. การคูณแบบ Dot Product

การคูณแบบ Dot Product หรือสเกลาร์ Product เป็นผลคูณของค่าขนาดของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใดๆ และคูณกับค่า COSINE ของมุมเวกเตอร์ทั้งสองนั้น เช่น ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือเวกเตอร์ จะได้ว่า

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta_{AB} \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

และใช้กฎการสลับที่จะได้ว่า $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$



รูปแสดง $\vec{A} \bullet \vec{B}$

จาก $\vec{A} \bullet \vec{B}$ จะทำให้ผลลัพธ์เป็นบวกของสเกลาร์ 9 เทอม แต่ละเทอมจะประกอบด้วย Dot Product ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ 2 เวกเตอร์นี้ ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์ 1 หน่วยที่แตกต่างกัน 2 ตัวของระบบพิกัดฉากเท่ากับ 90^0 (cos 90^0=0) จึงได้

$$\vec{a}_x \bullet \vec{a}_y = a_y \bullet \vec{a}_x = \vec{a}_x \bullet \vec{a}_z = \vec{a}_z \bullet \vec{a}_X = \vec{a}_Y \bullet \vec{a}_z = a_z \bullet \vec{a}_y = 0$$

ส่วนอีก 3 เทอม (cos0^0=1) จึงได้

$$\vec{a}_x \bullet \vec{a}_x = \vec{a}_y \bullet \vec{a}_y = \vec{a}_z \bullet \vec{a}_z = 1$$

ดังนั้น $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

เวกเตอร์ที่ Dot ตัวเองจะให้ค่าขนาดกำลังสองคือ $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = \left|\vec{A}\right|^2$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ Dot ด้วยตัวเองจะเท่ากับ 1 $\quad \therefore \ \vec{a} \bullet \vec{a} = 1$

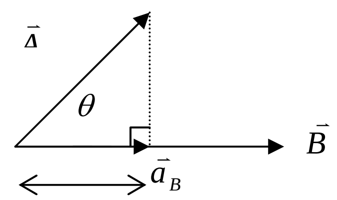
Vector Projection

การหาส่วนประกอบของเวกเตอร์ในทิศทางที่กำหนด เช่น ส่วนประกอบสเกลาร์ของ $\vec{B}$ ในทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{a}$ คือ

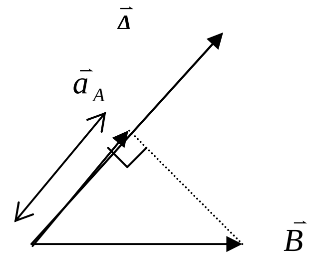
$$\vec{B} \bullet \vec{a} = \left|\vec{B}\right|\left|\vec{a}\right| \cos \theta_{BA}$$

ตัวอย่างเช่น ส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{a}_x$ คือ $\vec{B} \bullet \vec{a}_x = B_x$ และเวกเตอร์ของส่วนประกอบคือ $B_x \vec{a}_x$ หรือ $(\vec{B}_x \bullet \vec{a}_x)\vec{a}_x$

สรุปได้ว่า ส่วนประกอบของ $\vec{B}$ ในทิศทางของ $\vec{a}_x = \vec{B} \bullet \vec{a}_x = B_x$



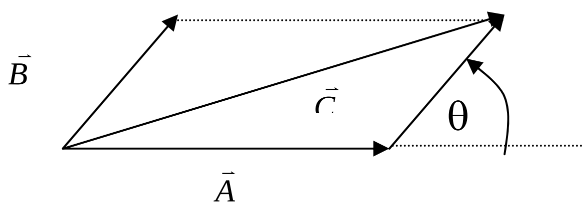
$A \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{a}_B$



$$\therefore ACOS\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{B} = \vec{A} \bullet \vec{a}_B \rightarrow \text{ ส่วนประกอบของ } \vec{A} \text{ ในทิศทางของ } \vec{B}$$

$$B \cos \theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{B} = \vec{B} \bullet \vec{a}_A \rightarrow \text{ส่วนประกอบของ } \vec{B} \text{ ในทิศทางของ} \vec{A}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่าถ้า $\vec{c} = \vec{A} + \vec{B}$áÅéÇ$c^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$ เมื่อมุม θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ (หาขนาดใช้ Dot Product)



วิธีทำ $\quad c^2 = c \bullet c$

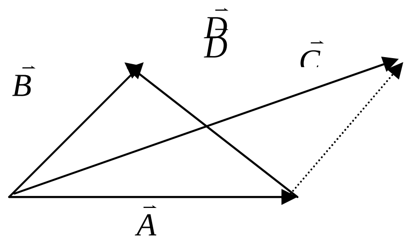
$$= (\vec{A} + \vec{B}) \bullet (\vec{A} + \vec{B})$$

$$= \vec{A} \bullet \vec{A} + \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A} + \vec{B}\vec{B}$$

$= A^2 + 2(\vec{A}\vec{B}) + B^2$

$= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ *จาก(Dot Product)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงแสดงว่า $C^2 + D^2 = 2(A^2 + B^2)$ และ $C^2 - D^2 = 4AB\cos\theta$



จากรูป $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$

$\therefore C^2 = \vec{C} \bullet \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \bullet (\vec{A} + \vec{B})$

$= A^2 + 2\vec{A}\vec{B} + B^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$

และ $D^2 = \vec{D} \bullet \vec{D} = (\vec{B} - \vec{A}) \bullet (\vec{B} - \vec{A}) = B^2 - 2\vec{A}\ \vec{B} + A^2$

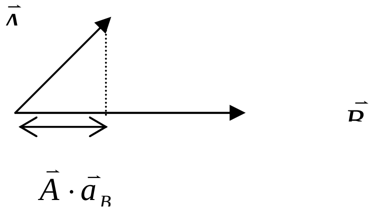
$= A^2 - 2AB\cos\theta + B^2$

ดังนั้น $C^2 + D^2 = 2(A^2 + B^2)$

$C^2 - D^2 = 4AB\cos\theta$

ตัวอย่างที่3 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 6\vec{a}_z$ และ $\vec{B} = \vec{a}_x + 2a_y - 2\vec{a}_z$ จงหา (ก) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (ข) มุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ (ค) ขนาดของ $\vec{A}$ (Ccomponent of $\vec{A}$ ที่อยู่ในทิศทางของ $\vec{B}$

วิธีทำ



(ก) $\vec{A} \bullet \vec{B} = |A||B|\cos\theta_{AB}$

$= (2\times1)\vec{a}_x \bullet \vec{a}_x + (-3\times2)\vec{a}_y - \vec{a}_y + (-6\times-2)\vec{a}z \bullet \vec{a}_z$

$= 2 - 6 + 12 = 18$

(ข) หา $|\vec{A}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

หา $|\vec{B}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

จาก $\vec{A} \bullet \vec{B} = |A||B| \cos \theta_{AB}$

$$\cos \theta_{AB} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{8}{(7 \times 3)} = \frac{8}{21} = 0.38$$

$$\therefore \theta_{AB} = \cos^{-1}(0.38) = 67.6^{\circ}$$

(ค) ขนาดของ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B}$ คือ $\vec{A} \bullet \vec{a}_B$

หา $\vec{a}_B$; $\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{|B|} = \frac{\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - 2\vec{a}_z}{3}$

$\therefore$ ขนาดของ $\vec{A}$ ในทิศทางของ $\vec{B} = \vec{A} \bullet \vec{a}_B$

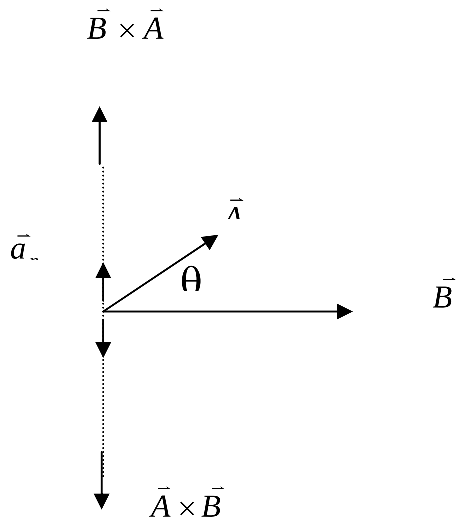
$$= (2\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 6\vec{a}_z) \bullet (\vec{a}_x + 2\vec{a}_y - 2\vec{a}_z) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{(2 \times 1) + (-3 \times 2) + (-6 \times -2)}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$ **ตอบ**

2. การคูณแบบ Cross Product

การคูณแบบ Cross Product หรือ Vector Product ดังแสดงดังรูป ซึ่งเป็น Cross Product ระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เท่ากับ

$$\vec{A} \times \vec{B} = |A||B| \sin \theta_{AB} \bullet \vec{a}_n$$



$\vec{a}_n$ คือ Unit Vector

รูปแสดงทิศทางของ $\vec{A} \times \vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \bullet \vec{a}_n ; \theta \leq \theta \leq \pi \quad , \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

การ Cross Product ใช้กฎการสลับที่ไม่ได้ ดังนั้น $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

คุณสมบัติของ Cross Product มีดังนี้

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$$

$\vec{a}_y \times \vec{a}_z = \vec{a}_x$ และ $\vec{a}_z \times \vec{a}_x = \vec{a}_y$

ข้อสังเกต $\vec{a}_x \rightarrow \vec{a}_y \rightarrow \vec{a}_z \rightarrow$ ¡ÅÑºä»$\vec{a}_x$ µÒÁà¢çÁ¹ÒÌ¡(

แต่ถ้ากลับทางก็จะได้ขนาดเท่าเดิมแต่กลับเครื่องหมายเช่น

$\vec{a}_y \times \vec{a}_x = -\vec{a}_z, \vec{a}_z \times \vec{a}_y = -\vec{a}_x; \vec{a}_x \times \vec{a}_z = -\vec{a}_y$

สมมติกำหนดว่า $\vec{A} = A \times \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$

$\vec{B} = B \times \vec{a}_x + B_y \vec{a}_y + B_z \vec{a}_z$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{a}_x + (A_z B_x - A_z B_x - A_x B_z)\vec{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{a}_z$

เขียนให้อยู่ในรูปของดีเทอร์มิแนนท์ได้ดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = (AyBz - AzBy)\vec{a}x + (AzBx - AxBz)\vec{a}y + (AxBy - AyBx)\vec{a}z$$

ตัวอย่างที่1 ถ้า $\vec{A} = 2\vec{a}x - 3\vec{a}y + \vec{a}z$ และ $\vec{B} = -4\vec{a}x - 2\vec{a}y + 5\vec{a}z$

วิธีทำ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}x & \vec{a}y & \vec{a}z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$= [(3)(5) - (1)(-2)]\vec{a}x - [(2)(5) - (1)(-4)]\vec{a}y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\vec{a}z$

$= -13\vec{a}x - 14\vec{a}y - 16\vec{a}z$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $\vec{A} = 2\vec{a}x - 5\vec{a}y + 3\vec{a}z; \vec{B} = -3\vec{a}x - 4\vec{a}y + \vec{a}z$ จงหา

(ก) $\vec{A} \times \vec{B}$ (ข) $\vec{a}z \times \overline{A}$ (ค) $\vec{a}z \times (\vec{a}z \times \vec{A})$

วิธีทำ (ก) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ 2 & -5 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= [-5(1) - (3)(-4)]\vec{a}x + [3(-3) - 2 \times 1]\vec{a}y + [2(-4) - (5)(-3)]\vec{a}z$

$= 7\vec{a}x - 11\vec{a}y - 23\vec{a}z$ **ตอบ**

(ข) $\vec{a}z \times \vec{A} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{a}x + 2\vec{a}y$ **ตอบ**

(ค) $\vec{a}z \times (\vec{a}z \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{a}_x - 5\vec{a}_y$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $\vec{A} = 3\vec{a}x + 4\vec{a}y + 2\vec{a}z \,;\, \vec{B} = -\vec{a}x + \vec{a}z$ จงหา

(ก) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (ข) $\vec{A} \times \vec{B}$

วิธีทำ

(ก) $\vec{A} \bullet \vec{B} = (3)(-1) + (4)(0) + (2)(1)$

$= -3 + 2 = -1$ **ตอบ**

(ข) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}x & \vec{a}y & \vec{a}z \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4+0)\vec{a}x + (-2-3)\vec{a}y + (0+4)\vec{a}z$

$= 4\vec{a}x - 5\vec{a}y + 4\vec{a}z$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1.2

1. ถ้า $\vec{A} = 3i + 2\vec{j} + 4k$ °áÅÐ $\vec{B} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ จงหาค่า cos θ เมื่อ $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

คำตอบ $\dfrac{13}{\sqrt{1102}} = 66.94^{\circ}$

2.ถ้า $F = (xyz)\vec{i} + 3x^2y\vec{j} + (xz^2 - y^2z)\vec{k}$ áÅÐ $del; \nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

จงหา $\nabla \times \vec{F}$ **คำตอบ** $-2 \times yzi + (xy - z^2)j + 2xy - xz)\vec{k}$

3. จงหามุมระหว่าง $\vec{A} = 5.8\vec{a}y + 1.55\vec{a}z$ áÅÐ $\vec{B} = -6.93\vec{a}y + 4.0\vec{a}z$ โดยใช้ทั้ง dot product และ cross product **คำตอบ** 135° และ 45° หรือ 135°

4.กำหนด $\vec{F} = 2\vec{a}x - 5\vec{a}y - 4\vec{a}z$ ..áÅÐ.. $\vec{G} = 3\vec{a}x + 5\vec{a}y + 2\vec{a}z$ จงหา

(ก) องค์ประกอบของ $\vec{F}$ ในแนว $\vec{G}$ (ข) เวกเตอร์องค์ประกอบ ของ $\vec{F}$ ในแนว $\vec{G}$

คำตอบ (ก) -4.38 (ข) $-2.13\vec{a}x - 3.55\vec{a}y - 1.42\vec{a}z$

5. ถ้า $\vec{F} = -45\vec{a}x + 70\vec{a}y + 25\vec{a}z$ ...áÅÐ.... $\vec{G} = 4\vec{a}x - 3\vec{a}y + 2\vec{a}z$ จงหา

(ก) $\vec{a}x \times (\vec{a}y \times \vec{F})$ (ข) $(\vec{a}x \times \vec{a}y) \times \vec{F}$ (ค) เวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$

คำตอบ (ก) $-45\vec{a}y$ (ข) $-(70\vec{a}x + 45\vec{a}y)$ (ค) $\vec{F} \times \vec{G} = 215\vec{a}x + 190\vec{a}y - 145\vec{a}z$

6. กำหนดจุด A (2,5,-1), B(3,-2,4) และ C(-2,3,1) จงหา

(ก) $\vec{R}_{AB} \bullet R_{AC}$ (ข) มุมระหว่าง $\vec{R}_{AB}$ กับ R_{AC} (ค) ความยาวของการฉายของ $\vec{R}_{AB}$ บน $\vec{R}_{AC}$

(ง) เวกเตอร์การฉายของ $\vec{R}_{AB}$ บน $\vec{R}_{AC}$

คำตอบ (ก) 20 (ข) 61.9°(ค) 4.08 (ง) -3.33 $\vec{a}x - 1.667\vec{a}y + 1.667\vec{a}z$